ВОРОНЕЖСКИЙ ОРДЕНА ЛЕНИНА ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ
ИМЕНИ ЛЕНИНСКОГО КОМСОМОЛА

На правах рукописи

Махортов Сергей Дмитриевич

УДК 517.946

ВЫРОЖДАЮЩИЕСЯ ПСЕВДОДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ ОПЕРАТОРЫ И ГРАНИЧНЫЕ ЗАДАЧИ ПЕРЕМЕННОГО ТИПА В ОБЛАСТЯХ С ГЛАДКОЙ ГРАНИЦЕЙ

(01.01.02 – дифференциальные уравнения и математическая физика)

А в т о р е ф е р а т
диссертации на соискание ученой степени
кандидата физико-математических наук

Воронеж – 1986

Работа выполнена в Воронежском ордена Ленина государственном университете имени Ленинского комсомола.

Научный руководитель: доктор физико-математических наук, профессор В.П.Глушко

Официальные оппоненты: доктор физико-математических наук, профессор Ю.В.Егоров,

кандидат физико-математических наук, доцент Е.В.Радкевич

Ведущая организация: Ленинградский государственный университет

Защита диссертации состоится 21 октября 1986 года в 15.10 часов на заседании специализированного совета К 063.48.09 по присуждению ученой степени кандидата физико-математических наук в Воронежском ордена Ленина государственном университете имени Ленинского комсомола по адресу. 394693, Воронеж, Университетская пл., 1, ВГУ, математический факультет.

С диссертацией можно ознакомиться в библиотеке Воронежского университета.

Автореферат разослан "___"___. 1986г.

Ученый секретарь специализированного совета

В.Г.Звягин

ОБЩАЯ ХАРАКТЕРИСТИКА РАБОТЫ

Актуальность темы. В последнее тридцатилетие интенсивно развивается теория вырождающихся эллиптических уравнений, основы которой были заложены М.В. Келдышем. Значительные результаты в этом направлении получены в работах С.Г. Михлина, М.И. Вишика, А.В. Бицадзе, Г. Фикеры, О.А. Олейник, Дж.Дж. Кона, Л. Ниренберга, и др. B-эллиптические уравнения изучались И.А. Киприяновым. Введение весовых пространств позволило В.П. Глушко, М.И. Вишику и В.В. Грушину рассматривать вырождающиеся эллиптические уравнения как коэрцитивные. Фундаментальные теоремы вложения для весовых пространств получены В.И. Кондрашовым, Л.Д. Кудрявцевым, О.В. Бесовым, В.П. Ильиным, И.П. Лизоркиным, С.М. Никольским, С.В. Успенским. Исследование весовых пространств при произвольно «сильном» характере вырождения было проведено в работах В.П. Глушко, С.Я. Львина, М.И. Богатова, Х.-Г. Леопольда, Х. Трибеля и др.

Значительные продвижения в теории вырождающихся эллиптических уравнений были достигнуты с помощью методов теории псевдодифференциальных операторов (ПДО). Теория вырождающихся ПДО развивалась М.И. Вишиком, В.В. Грушиным, В.Г. Мазьей, Б.П. Панеяхом и др. Субэллиптические ПДО исследовались Л. Хермандером, Ю.В. Егоровым и др. Широкий класс ПДО изучен С.Э. Левендорским. Применение весовых ПДО позволило А.Д. Баеву получить существенные продвижения в теории граничных задач в полупространстве для вырождающихся эллиптических уравнений высокого порядка. Теория ПДО применялась при исследовании задач переменного типа для регулярных эллиптических уравнений в областях с гладкой границей, когда соответствующие граничные операторы имеют существенно переменные коэффициенты. Некоэрцитивные задачи для уравнений второго порядка с граничными условиями второго порядка

исследовались Б.П. Панеяхом. Различные варианты задачи с вырождающейся косой производной изучались А.В. Бицадзе, Р. Борелли, А. Янушаускасом и др. Фундаментальные результаты по разрешимости этой задачи были получены в работах Ю.В. Егорова и В.А. Кондратьева, М.Б. Малютова, В.Г. Мазьи, К. Таиры.

Диссертационная работа посвящена изучению вырождающихся ПДО специального класса и связанных с ними весовых пространств типа Соболева-Слободецкого-Ароншайна. В диссертации исследуются вопросы коэрцитивной разрешимости уравнений, содержащих вырождающиеся ПДО, а также приводимых к этим уравнениям граничных задач переменного типа для регулярных эллиптических уравнений второго порядка.

Цель работы состоит в

– построении и исследовании весовых пространств основных и обобщенных функций;

– определении класса весовых ПДО в R_n и установлении ряда свойств этих операторов;

– введении весовых пространств типа Соболева-Слободецкого-Ароншайна и изучении их свойств (полнота, плотность гладких функций, интерполяционные свойства и др.);

– определении специального класса вырождающихся ПДО и установлении теорем сравнения операторов этого класса с соответствующими весовыми ПДО;

– доказательстве априорных оценок и построении параметрикса (либо обратного оператора) для вырождающихся ПДО, связанных с граничными задачами переменного типа;

– нахождении условий разрешимости одной задачи с вырождающейся косой производной в области $\Omega \subset R_3$ с гладкой границей.

Общая методика исследований основана на методах теории обобщенных функций, функционального анализа, теории ПДО. В работе широко применяются методы преобразования Фурье и некоторые приемы,

основанные на теории интерполяции. При исследовании вырождающихся псевдодифференциальных уравнений высокого порядка используется метод факторизации, а также метод продолжения по параметру. Рассмотрение граничных задач основано на методах локализации и сведения задачи к псевдодифференциальному уравнению на граничном многообразии.

Научная новизна. Все полученные в диссертации результаты являются новыми. Впервые построены и исследованы специальные классы основных и обобщенных функций, заданных в R_n. При этом установлены некоторые новые свойства весовой функции α, позволившие отбросить одно из условий на α, сформулированных ранее А.Д. Баевым.

Введен класс весовых ПДО в R_n с весьма простой алгеброй. Установлена инвариантность относительно весовых ПДО некоторого класса гладких функций. Введены новые классы весовых пространств типа Соболева-Слободецкого-Ароншайна, для которых доказаны полнота, плотность гладких функций, некоторые интерполяционные свойства, а также утверждение о локальном (вне гиперплоскости $t=0$) совпадении указанных пространств с соответствующими невесовыми пространствами.

Изучен новый класс ПДО, вырождающихся на множестве ненулевой меры. Доказанная теорема сравнения вырождающихся ПДО и весовых ПДО позволила впервые применить при исследовании некоторых классов вырождающихся псевдодифференциальных уравнений методы эллиптических ПДО. Впервые в работе обоснована возможность частичного «замораживания» символа вырождающегося ПДО.

Приведенные выше результаты применены для исследования новых классов граничных задач с вырождением. В качестве одного из примеров применения общей теории в заключительной части диссертации установлена однозначная разрешимость задачи с косой производной в R_3 в случае, когда направление дифференцирования ℓ в граничном условии касается подмногообразия вырождения.

Теоретическая и практическая ценность. Результаты, полученные в диссертации, относятся к одному из интенсивно развивающихся в последнее время разделов общей теории дифференциальных операторов – теории граничных задач с существенно переменными коэффициентами. Теоремы разрешимости, установленные в работе, применимы к весьма широкому классу граничных задач переменного типа, а также соответствующих им псевдодифференциальных уравнений на гладких многообразиях без края. Важными особенностями являются произвольно «сильный» характер вырождения и конечная гладкость в нуле весовой функции. Самостоятельный интерес представляют примененный в работе метод доказательства плотности гладких функций в весовых пространствах, а также изученные классы вырождающихся ПДО. Изложенная в работе методика может служить основой построения теории граничных задач переменного типа для регулярных эллиптических уравнений высокого порядка.

Настоящая работа носит теоретический характер. Результаты исследований могут быть применены при решении ряда конкретных задач математической физики.

Апробация работы. Полное доказательство результатов диссертационной работы было заслушано на семинарах по уравнениям в частных производных ВГУ (рук. проф. В.П. Глушко). Полученные в диссертации результаты докладывались на IX и X Всесоюзных школах по теории операторов в функциональных пространствах (Тернополь, 1984 г. и Новосибирск, 1985 г.), на совместном заседании семинара им. И.Г. Петровского и Московского математического общества (Москва, 1986 г.), на IX конференции молодых ученых и специалистов УДН им. П. Лумумбы (Москва, 1986 г.), а также на научных сессиях ВГУ (1985–1986 гг.).

Публикации. Основные результаты диссертации опубликованы в работах [1–8]. Из работы [1], опубликованной совместно с В.П. Глушко, в диссертацию вошли результаты, полученные лично автором.

Структура и объем работы. Диссертация состоит из введения и четырех глав. Объем диссертации – 122 страницы, библиография – 69 названий.

СОДЕРЖАНИЕ ДИССЕРТАЦИИ

В первой главе диссертационной работы введены весовые пространства основных и обобщенных функций, заданных в $R_n^{\pm}$ и R_n. Здесь и в дальнейшем $R_n=\{(t,x):\ t\in R_1, x\in R_{n-1}\}: R_n^{\pm}=\{(t,x): t, x\in R_{n-1}\}$. Через $S=S(R_n)$, как обычно, обозначим пространство Л. Шварца комплекснозначных гладких быстроубывающих функций φ со счетной системой норм

$$\left\|[\varphi]\right\|_p=\sup_{(t,x)\in R_n}\left(1+|t|+|x|\right)^P\sum_{j+|\beta|\le p}\left|D_t^j D_x^\beta\varphi(t,x)\right|,\ \ p=0,1,\ldots$$

Определим весовую функцию $\alpha\in C(R_1)$, удовлетворяющую следующим условиям.

Условие 1. $\alpha(t)=0,\ t\le 0;\ \alpha(t)>0,\ t>0;$

$$\alpha(t)=const,\ t\ge d>0.$$

Условие 2. $d^+=d\big|_{R_1^+}\in C^\infty\left(\overline{R}_1^+\right);\ \alpha\in C^M(R_1)\ (M\ge 0)$.

Положим

$$\tau=\tau(t)\ \ \int_d^+\frac{d\rho}{\alpha(\rho)},\ t\in R_1^+. \qquad (1)$$

В силу условий 1-2 существует функция $t=\psi(\tau)$, $\tau\in R_1$, обратная к (1). По функции $\varphi\in C(R_n^+)$ определим функцию $\varphi_2\in C(R_n)$ равенством

$$\varphi_\alpha=(\tau,x)=\alpha^{1/2}(\psi(\tau))\varphi(\psi(\tau),x). \qquad (2)$$

Определение 1. Функция $\varphi\in C^\infty(R_n^+)$ принадлежит пространству $S_\alpha^+=S_\alpha(R_n^+)$, если соответствующая функция φ_α принадлежит S. Система норм в S_α^+ имеет вид $\left\|[\varphi]\right\|_{p,\alpha}^+=\left\|[\varphi_\alpha]\right\|_p$, $p=0,1\ldots$

В S_α^+ непрерывны следующие операции:

1) умножение на функцию $a \in C\left(R_n^+\right)$, для которой $a_\alpha \in C^\infty\left(R_n\right)$, причем каждая производная функция a_α растет на бесконечности не быстрее полинома;

2) дифференцирование $D_t^j D_x^\beta \left(j + |\beta| = 0,1,...\right)$;

3) весовое дифференцирование $D_{d,t}^j \left(j = 0,1,...\right)$, где

$$D_{\alpha,t} = \alpha^{1/2}(t) D_t \alpha^{1/2}(t); \tag{3}$$

4) преобразование Фурье $F_{x \to \xi}$.

На функциях $\varphi \in S_\alpha^+$ определим весовое преобразование Фурье по переменной t $F_\alpha[\varphi](\eta, x) = F_{\tau \to \eta}[\varphi_\alpha]$. Для преобразования F_α существует F_α^{-1}: $F_\alpha^{-1}[\nu](t,x) = \alpha^{1/2}(t) F_{\eta \to \tau(t)}^{-1}[\nu]$. Преобразование F_α отображает взаимно однозначно и непрерывно S_α^+ на S. Легко проверить справедливость равенств

$$F_\alpha\left[D_{d,t}^j \varphi\right] = \eta^j F_\alpha[\varphi]; \; D_\eta^j F_\alpha[\varphi] = F_\alpha\left[\tau^j \varphi\right], \; j = 0,1,... \tag{4}$$

где $\varphi \in S_\alpha^+$; $D_{d,t}$ определена в (3).

<u>Определение 2</u>. Функция $\varphi \in C^\infty\left(R_n^-\right)$ принадлежит пространству S^-, если функция φ_0, являющаяся продолжением нулем на R_n функции φ, принадлежит S. Топология в S^- задается системой норм $\left\|[\varphi]\right\|_p^- = \left\|[\varphi_0]\right\|_p$, $p = 0,1,...$

<u>Определение 3</u>. Функция $\varphi \in C^\infty\left(R_n\right)$ принадлежит пространству $S_\alpha = S_\alpha\left(R_n\right)$, если функция $\varphi^+ = \varphi\big|_{R_n^+}$ принадлежит S_α^+, а функция $\varphi^- = \varphi\big|_{R_n^-}$ принадлежит S^-. Введем в S_α счетную систему норм

$$\left\|[\varphi]\right\|_{p,\alpha} = \left\|\left[\varphi^+\right]\right\|_{p,\alpha}^+ + \left\|\left[\varphi^-\right]\right\|_p^-, \; p = 0,1,...$$

Нетрудно ввести в S^- и S_α непрерывные операции, аналогичные 1)–4). Справедливо включение $S_\alpha \subset S$.

Определение 4. Пространство обобщенных функций $S'\left(S_\alpha'^{+}, S'^{-}, S_\alpha'\right)$ состоит из всех линейных непрерывных функционалов на S (соответственно $S_\alpha^{+}, S^{-}, S_\alpha$). Сходимость определим как слабую сходимость функционалов.

Операции, определенные на $S_\alpha^{+}, S^{-}, S_\alpha$, легко переносятся на сопряженные пространства $S_\alpha'^{+}, S'^{-}, S_\alpha'$.

Во второй главе работы изучены весовые ПДО (ВПДО) и пространства типа Соболева-Слободецкого-Ароншайна с весом.

Обозначим через R^n эвклидово пространство $\left\{(\eta,\xi): \eta \in R^1, \xi \in R^{n-1}\right\}$, двойственное к R_n.

Определение 5. Функция $\lambda \in C^\infty\left(R^n\right)$ принадлежит классу символов $\Phi_q = \Phi_q\left(R^n\right)\left(q \in R_1\right)$, если

$$\left|D_\eta^j D_\xi^\beta \lambda(\eta,\xi)\right| \le C_{j,\beta}\left(1+\eta^2+|\xi|^2\right)^{\frac{q-j-|\beta|}{2}}, \ j+|\beta| = 0,1,\ldots$$

Определение 6. На функциях $\varphi \in S_\alpha$ определим ВПДО $P_{\alpha,q}\left(D_{\alpha,t} D_x\right)$ с символом $P_{\alpha,q}(\eta,\xi) = \lambda(\eta,\xi)$, $\lambda \in \Phi_q$ по формуле

$$P_{\alpha,q}\varphi = \begin{cases} F_{\xi\to x}^{-1} F_\alpha^{-1}\left[\lambda(\eta,\xi) F_\alpha F_{x\to\xi}\left[\varphi^+\right]\right], t>0 \\ F_{\xi\to x}^{-1}\left[\lambda(0,\xi) F_{x\to\xi}\left[\varphi^-\right]\right], \ t<0 \end{cases}. \tag{5}$$

Оператор $P_{\alpha,q}$ непрерывен в S_α. Это позволяет распространить формулу (5) на функции $f \in S_\alpha'$. Легко проверить, что в случае

$$\lambda(\eta,\xi) = \sum_{j+|\beta|\le m} a_{j\beta}\eta^j \xi^\beta$$

соответствующий ВПДО имеет вид

$$P_{\alpha,m} f = \sum_{j+|\beta|\le m} a_{j,\beta} D_{d,t}^j D_x^\beta f, \ f \in S_\alpha'.$$

Определение 7. Множество $S^M = S^M\left(R^n\right)$ ($M \ge 0$ – целое) состоит из функций $\varphi \in C^M\left(R^n\right)$, для которых $\varphi^\pm \in C^\infty\left(\bar{R}_n^\pm\right)$, причем

$$\sup_{(t,x)\in R_n^\pm}\left(1+|t|+|x|\right)^P \sum_{j+|\beta|\le p}\left|D_t^j D_x^\beta \varphi^\pm\right| < \infty, \ p = 0,1,\ldots$$

Теорема 1. Пусть выполнены условия 1–2. Тогда при любом $q \in R_1$ ВПДО $P_{\alpha,q}\left(D_{\alpha,t}, D_x\right)$ отображает S^M в S^M.

В дальнейшем через $\|\bullet\|$ будем обозначать норму в $L_2\left(R_n\right)$ и через $\Lambda_\alpha^s = \Lambda_\alpha^s\left(D_{\alpha,t}, D_x\right)$ – ВПДО с символом $\lambda(\eta,\xi) = \left(1+\eta^2+|\xi|^2\right)^{s/2} \left(s \in R_1\right)$.

Определение 8. Функция $u \in S'_\alpha$ принадлежит пространству $H_\alpha^s = H_\alpha^s\left(R_n\right)\left(s \in R_1\right)$, если конечна норма $\|u\|_{s,\alpha} = \left\|\Lambda_\alpha^s u\right\|$.

Для пространств H_α^s справедлив ряд свойств, аналогичных свойствам невесовых пространств Соболева-Слободецкого-Ароншайна $H^s = H^s\left(R_n\right)$ с нормой $\|u\|_s = \left\|\left(1+\eta^2+|\xi|^2\right)^{s/2} F_{x\to\xi} F_{t\to\eta}[u]\right\|$.

Кроме того, при $t > 0$ пространства H_α^s и H^s локально совпадают.

Определение 9. Пространство $H_{\alpha,\delta}^s = H_{\alpha,\delta}^s\left(R_n\right)$ $\left(s \ge 0, \delta > 1, \left[s/\delta\right] \le M+1\right.$, M – из условия 2) состоит из функций $u \in H^{\left[s/\delta\right]}\left(R_n\right) \subset S'_\alpha$, для которых конечна норма

$$\|u\|_{s(\alpha,\delta)}^2 = \sum_{\ell=0}^{\left[s/\delta\right]} \left\|\partial_t^\ell u\right\|_{s-\delta\ell,\alpha}^2 + \|u\|_{\left[s/\delta\right]}^2 .$$

Определение 10. Пространство $H_\alpha^{s,k} = H_\alpha^{s,k}\left(R_n\right)$ $\left(s \ge 0, k \le M+1, k \ge 0\right.$ – целое) состоит из функций $u \in H^k \subset S'_\alpha$ с конечной нормой

$$\|u\|_{s,k,\alpha}^2 = \sum_{j+|\beta|\le k} \left\|D_t^j D_x^\beta u\right\|_{s,\alpha}^2 + \|u\|_k^2 .$$

Теорема 2. Пусть выполнены условия 1–2. Тогда пространства $H_{\alpha,\delta}^s$ и $H_\alpha^{s,k}$ являются полными и в каждом из них плотно множество S.

Третья глава диссертационной работы посвящена исследованию свойств некоторых классов вырождающихся ПДО.

На функциях $\varphi \in S_\alpha\left(R_1\right)$ определены ПДО вида

$$P_q\left(\alpha(t) D_t\right)\varphi = F_{\eta\to t}^{-1}\left[\lambda\left(\alpha(t)\eta\right) F_{t\to\eta}[\varphi]\right], \tag{6}$$

где $\lambda \in \Phi_q\left(R^1\right)$. Наряду с условиями 1–2 сформулируем также

Условие 3. Существуют $C>0$ и $N\ge 1$ такие, что $\alpha^N(\theta)\le C\alpha(t),\ 0<\theta<t$.

Очевидно, для неубывающей в некоторой окрестности точки $t=0$ функции α условие 3 выполнено с $N=1$. Если существуют неубывающие непрерывные функции α_1 и α_2, для которых $0<\alpha_1(t)\le\alpha(t)\le\alpha_2(t)$ при $t>0$ и $\alpha_2^N(t)\le C\alpha_1(t)$, то условие 3 также выполнено при данном N.

Теорема 3. Пусть выполнены условия 1–3. Тогда для любой функции $u\in H_\alpha^{s+q}(R_n)(s\ge 0,q\ge 0)$ при $0\le\varepsilon\le\min(1,q)$ справедлива оценка

$$\left\|P_q(\alpha D_t)u-P_{\alpha,q}(D_{\alpha,t})u\right\|_{s,\alpha}\le C\|u\|_{s+q-\varepsilon,\alpha}.$$

Введем вырождающийся ПДО $M_q(\alpha D_t)$, $q\ge 0$ – целое с символом $\lambda(\alpha(t)\eta)=|\alpha(t)\eta|^q$, определяемый равенством (6).

Теорема 4. Пусть выполнены условия 1–3. Тогда при любом целом $q\ge 1$ выполняются оценки

$$\left\|M_q(\alpha D_t)u-\Lambda_\alpha^q(D_{\alpha,t})u\right\|_{s(\alpha,\delta)}\le C\|u\|_{s+q-1(\alpha,\delta)},\forall u\in H_{\alpha,\delta}^{s+q};$$

$$\left\|M_q(\alpha D_t)u-\Lambda_\alpha^q(D_{\alpha,t})u\right\|_{s,k,\alpha}\le C\|u\|_{s+q-1,k,\alpha},\forall u\in H_\alpha^{s+q,k},$$

где Λ_α^q – ВПДО с символом $\Lambda_\alpha^q(\eta)=\left(1+\eta^2\right)^{q/2}$.

Теоремы 3–4 позволяют при исследовании уравнений с вырождающимися ПДО заменять эти операторы весовыми ПДО, символы которых принадлежат хорошо изученному классу Φ_q.

Рассмотрим еще один класс вырождающихся ПДО. Пусть $\lambda(\eta,\xi)$ – положительно однородная функция степени $q\ge 0$, q – целое, бесконечно дифференцируемая при $|\eta|+|\xi|>0$. Рассмотрим оператор

$$\alpha^q(t)A(D_t,D_k)=\alpha^q(t)F_{\eta\to t}^{-1}F_{\xi\to x}^{-1}\left[\lambda(\eta,\xi)F_{x\to\xi}F_{t\to\eta}[\bullet]\right] \tag{7}$$

с описанием однородным символом λ. Обозначим также

$$\alpha^q(t)A(D_t,0)=\alpha^q(t)F_{\eta\to t}^{-1}\left[\lambda(\eta,0)F_{t\to\eta}[\bullet]\right].$$

Теорема 5. Пусть выполнены условия 1–3. Для любого $\varepsilon > 0$ существует $\delta > 0$ такое, что при целом $q \geq 1$ и любой $h \in C_0^\infty([-\delta,\delta])$ справедливы неравенства

$$\left\| h(t)\left\{\alpha^q(t)A(D_t,D_x)u - \alpha^q(t)A(D_t,0)u\right\}\right\|_{s(\alpha,\delta)} \leq \varepsilon \|u\|_{s+q(\alpha,\delta)} +$$
$$+C(h,\varepsilon)\|u\|, \quad \forall u \in H_{\alpha,\delta}^{s+q};$$

$$\left\| h(t)\left\{\alpha^q(t)A(D_t,D_x)u - \alpha^q(t)A(D_t,0)u\right\}\right\|_{s,\kappa,\alpha} \leq \varepsilon \|u\|_{s+q,\kappa,\alpha} +$$
$$+C(h,\varepsilon)\|u\|, \ \forall u \in H_{\alpha}^{s+q,\kappa}.$$

Теорема 5 позволяет при исследовании уравнений, содержащих операторы вида (7), применять метод частичного «замораживания» символа оператора (7).

В четвертой главе работы исследованы вопросы разрешимости специальных классов вырождающихся псевдодифференциальных уравнений в R_n и приводимых с ним общих граничных задач переменного типа для регулярных эллиптических уравнений.

Рассмотрим в R_n каноническое уравнение вида

$$P_{\alpha,q}u \pm \partial_t u = f \tag{8}$$

где символ λ ВПДО $P_{\alpha,q}(D_{\alpha,t},D_x)$ принадлежит $\Phi_q(R^n)$, $q > 1$ и удовлетворяет неравенству $R\ell\lambda(\eta,\xi) \geq C\left(1+\eta^2+|\xi|^2\right)^{q/2}$.

Теорема 6. Пусть выполнены условия 1–2. Тогда для любой $f \in H_{\alpha,q}^s$ существует единственное решение $u \in H_{\alpha,q}^{s+q}$ уравнения (8), удовлетворяющее оценке $\|u\|_{s+q(\alpha,q)} \leq C\|f\|_{s(\alpha,q)}$.

Перейдем к изучению задачи

$$LU = 0, \quad y > 0, \tag{9}$$

$$\sum_{\ell=0}^{P} \partial_t^\ell \breve{B}_\ell U\big|_{y=0} = f, \tag{10}$$

где $L = L(D_t,D_x,D_y)$ – эллиптический дифференциальный оператор второго порядка в R_{n+1}; P – натуральное число;

$$\check{B}_\ell = \check{B}_\ell\left(\alpha(t)D_t, D_x, \alpha(t)D_y\right) = \sum_{j+|\beta|+\kappa\le m-q\ell} \check{b}_{jp\kappa}\,\alpha^j(t)D_t^\alpha D_x^\beta \alpha^\kappa(t)D_y^\kappa\,,$$

m – натуральное; $q=\dfrac{m}{p}>1$, $\check{b}^{\ell}_{j\beta\kappa}$ – комплексные числа, $\check{b}^{P}_{000}=1$.

Для упрощения изложения положим

$$L\left(D_t, D_x, D_y\right) = \Delta - \chi^2, \tag{11}$$

где Δ – оператор Лапласа, $\chi^2>0$.

Как известно, задача (9)–(10) сводится к псевдодифференциальному уравнению на гиперплоскости $y=0$.

$$Bu = \sum_{\ell=0}^{P} \partial_t^\ell B_\ell u = f\,. \tag{12}$$

где $u = U\big|_{y=0}$;

$$B_\ell = B_\ell\left(\alpha(t)D_t, D_x, \alpha(t)\Lambda\right) = \sum_{j+|\beta|+\kappa\le m-q\ell} b^\ell_{j\beta\kappa}\alpha^j(t)D_t, D_x^\beta \alpha^\kappa(t)\Lambda^\kappa\,, \tag{13}$$

$$b^\ell_{j\beta\kappa} = (-i)^\kappa \check{b}^{\ell}_{j\beta\kappa},\ \Lambda = \Lambda\left(D_t, D_x, \chi\right) = F^{-1}_{\eta\to t}F^{-1}_{\xi\to x}\left[\left(\chi^2+\eta^2+|\xi|^2\right)^{1/2} F_{\kappa\to\xi}F_{t\to\eta}[\bullet]\right]. \tag{14}$$

<u>Определение 11</u>. Оператор E назовем параметриксом для оператора B, определенного в (12), если для любых $f\in H^s_{\alpha,q}, u\in H^{s+m}_{\alpha,q}$ справедливы равенства $BEf = f+Tf$, $EBu = u+Tu$, где оператор T таков, что для любого $s\ge 1$, любой $\varphi\in S$ выполняется оценка $\|T\varphi\|_{s(\alpha,q)} \le C\|\varphi\|_{s-1(\alpha,q)}$.

Введем обозначения

$$B^0(\zeta,\eta,\xi,\theta) = \sum_{\ell=0}^{P}\zeta^\ell B^0_\ell(\zeta,\xi,\theta)\,;\ B^0_\ell = \sum_{j+|\beta|+k=m-q\ell} b^\ell_{j\beta k}\eta^j\xi^\beta\theta^k\,.$$

<u>Условие 4</u>. Полином B^0 при $\theta\ge 0$, $|\eta|+|\xi|+\theta>0$ не имеет ζ-корней, лежащих на мнимой оси, и его ζ-корни являются бесконечно дифференцируемыми функциями переменных θ,η,ξ при $\theta\ge 0$, $|\eta|+|\xi|+\theta>0$.

С помощью представления оператора B в виде произведения рассмотренных выше канонических операторов плюс оператор меньшего порядка доказывается

<u>Теорема 7</u>. Пусть выполнены условия 1–4. Тогда

1) для любой функции $u \in H_{\alpha,q}^{s+m}$ справедлива оценка

$\|u\|_{s+m(\alpha,q)} \le C\left(\|Bu\|_{s(\alpha,q)} + \|u\|\right)$;

2) для оператора B существует параметрикс.

<u>Замечание</u>. Если получено решение $u \in H_{\alpha,q}^{s+m}(R_n) \subset H^{\left[s/q\right]+P}(R_n)$ уравнения (12), то решение $U \in H^{\left[s/q\right]+p+1/2}\left(R_{n+1}^{+}\right)$ задачи (9)-(10) строится по формуле $U = Ru$, где R – обратный оператор к оператору задачи Дирихле для уравнения (9).

Переходя к исследованию случая $p = 0$ в (10), рассмотрим задачу

$$LU = 0, \quad y = 0, \tag{15}$$

$$\sum_{j+|\beta|+\ell \le m} \check{b}_{j\beta\ell}\, \alpha^j(t) D_t^j D_x^\beta \alpha^\ell(t) D_y^\ell U + \nu^m U\big|_{y=0} = f, \tag{16}$$

где оператор L определен в (11); m – натуральное; $\check{b}_{j\beta\ell}$ – комплексные числа; ν – комплексный параметр.

Задача (15)–(16) сводится к псевдодифференциальному уравнению

$$Bu = f \tag{17}$$

с оператором

$$B = B\left(\alpha(t) D_t, D_x, \alpha(t)\Lambda, \nu\right) = \sum_{j+|\beta|+\ell \le m} b_{j\beta\ell} \alpha^j(t) D_t^j D_x^\beta \alpha^\ell(t) \Lambda^\ell + \nu^m, \tag{18}$$

где $b_{j\beta\ell} = (-i)^\ell \check{b}_{j\beta\ell}$, оператор Λ введен в (14).

Положим

$$B^0(\eta,\xi,\theta,\nu) = \sum_{j+|\beta|+\ell = m} b_{j\beta\ell} \eta^j \xi^\beta \theta^\ell + \nu^m .$$

<u>Условие 5</u>. Существует сектор комплексной плоскости $Q = \{\nu : \ell_1 \le \arg \nu \le \ell_2\}$ такой, что при $\nu \in Q$, $\theta \ge 0$, $|\eta| + |\xi| + \theta + |\nu| > 0$ функция B^0 не обращается в нуль.

<u>Теорема 8</u>. Пусть выполнены условия 1–3, 5. Тогда можно указать $\nu_0 > 0$ такое, что при $|\nu| \ge \nu_0$, $\nu \in Q$ для любой $f \in H_\alpha^{s,k}$ существует единственное

решение $u \in H_{\alpha}^{s+m,k}$ уравнения (17), удовлетворяющее неравенству $\|u\|_{s+m,k,\alpha} \le C\|f\|_{s,k,\alpha}$ с постоянной $C > 0$, не зависящей от f, v.

Следствие. В условиях теоремы 8 можно указать $v_0 > 0$ такое, что при $|v| \ge v_0$, $v \in Q$ для любой $f \in H^k(R_n)$, $k = 1, 2, ..., M+1$ существует единственное решение $U \in H^{k+1/2}(R_{n+1}^+)$ задачи (15)–(16), для которого справедлива оценка $\|U\|_{k+1/2}^+ \le C\|f\|_k$, где постоянная $C > 0$ не зависит от f, v.

Теоремы 7–8 легко переносятся на случай, когда операторы (13) и (18) имеют несущественные переменные коэффициенты.

Все полученные в работе результаты справедливы и в том случае, когда функция α удовлетворяет следующим условиям.

Условие 1'. $\alpha(0) = \alpha'(0) = 0$; $\alpha(t) > 0$, $|t| > 0$; $\alpha(t) = const$, $|t| \ge d > 0$.

Условие 2'. $\alpha^{\pm} = \alpha|_{R_1^{\pm}} \in C^{\infty}(\overline{R}_1^{\pm})$; $\alpha \in C^{M+1}(R_1)(M \ge 0)$.

Условие 3'. Для некоторых $C > 0$ и $N \ge 1$ справедливо

$\alpha^{\pm N}(\theta) \le C\alpha^{\pm}(t)$, $o < \pm\theta < \pm t$.

В качестве приложения изучим задачу с косой производной в трехмерном пространстве

$$LU - \kappa^2 U = 0, \ z \in \Omega, \tag{19}$$

$$\check{b}U = \frac{\partial U}{\partial \ell} - vU = f, \ z \in \partial\Omega, \tag{20}$$

где L – эллиптический оператор 2-го порядка с вещественными коэффициентами; Ω – ограниченная область в R_3 с гладкой границей $\partial\Omega$; $\ell = \ell(z)$ – гладкое вещественное векторное поле на $\partial\Omega$; κ^2 и v – положительные числа.

Условие 6. Поле ℓ касается поверхности $\partial\Omega$ в каждой точке некоторой замкнутой кривой $\Gamma \subset \partial\Omega$, касаясь при этом Γ. В точках $z \in \partial\Omega / \Gamma$ ℓ не касается $\partial\Omega$.

Для каждой точки $z_0 \in \Gamma$ существует система координат (t, x, y) с центром в этой точке такая, что в некоторой окрестности z_0 поверхность $\partial\Omega$

задается уравнением $y=0$, а кривая Γ – уравнениями $y=0,\ t=0$. В этой системе координат граничное условие (20) имеет вид

$$\check{B}U=b_1(t,x)=\frac{\partial U}{\partial y}+b_2(t,x)\frac{\partial U}{\partial t}+b_3(t,x)\frac{\partial U}{\partial x}-\nu U=f\ ,\ y=0, \qquad (21)$$

причем $b_1^2+b_2^2+b_3^2>0$; $b_1(0,x)=b_2(0,x)=0$; $b_1(t,x)\neq 0,\ |t|=0$.

<u>Условие 7</u>. Существует функция α, удовлетворяющая условиям 1'–3', такая, что в некоторой окрестности любой точки $z_0\in\Gamma$ справедливо

$$\lim_{t\to 0}\frac{b_1(t,x)}{\alpha(t)}=C(x),\ \frac{1}{C_0}\le C(x)\le C_0,\ C_0>0,$$

где b_1 – функция из (21).

<u>Условие 8</u>. В некоторой окрестности каждой точки $z_0\in\Gamma$ функция $\dfrac{b_2(t,x)}{b_1(t,x)}$ равномерно ограничена.

<u>Теорема 9</u>. Пусть выполнены условия 6–8. Тогда можно указать такие $\nu_0>0$ и $\kappa_0>0$, что при $\nu\ge\nu_0$, $\kappa\ge\kappa_0$ для любой $f\in H^k(\partial\Omega)$, $k=1,2,...,M+1$ существует единственное решение $U\in H^{k+1/2}(\Omega)$ задачи (1)–(2), удовлетворяющее неравенству

$$\|U\|_{H^{k+1/2}(\Omega)}\le C\|f\|_{H^k(\partial\Omega)}$$

с постоянной $C>0$, не зависящей от f,ν,κ.

Автор глубоко благодарен научному руководителю профессору В.П. Глушко за постановку задач и постоянное внимание к работе.

Основное содержание диссертации опубликовано в следующих работах.

1. Глушко В.П., Махортов С.Д. О существовании гладких решений задачи с вырождающейся косой производной / Воронеж. гос. ун-т. – Воронеж, 1983. – 28 с. – Деп. в ВИНИТИ 24.03.83, №1502 – 83 Деп.

2. Махортов С.Д. О некоторых весовых классах основных и обобщенных функций / Воронеж. гос. ун-т. – Воронеж, 1984. – 27 с. – Деп. в ВИНИТИ 25.06.84, №4305 – 84 Деп.

3. Махортов С.Д. Задача о вырождающейся косой производной // IX школа по теории операторов в функц. пространствах: Тез. докл. – Тернополь, 1984. – С.87.

4. Махортов С.Д. Непрерывные операции в весовых пространствах основных и обобщенных функций // Некоторые прил. функц. анализа к задачам мат. физики: Тр. семинара С.Л. Соболева. – Новосибирск, 1984. – №2. – С.109–121.

5. Махортов С.Д. Априорные оценки решений одного класса вырождающихся эллиптических дифференциальных уравнений в R_n / Воронеж. гос. ун-т. – Воронеж, 1985. – 29 с. – Деп. в ВИНИТИ 7.08.85; №5919 – 85 Деп.

6. Махортов С.Д. О некоторых классах вырождающихся псевдодифференциальных уравнений в R_n / Воронеж. гос. ун-т. – Воронеж, 1985. – 42 с. – Деп. в ВИНИТИ 7.08.85, №5919 – 85 Деп.

7. Махортов С.Д. О некоторых свойствах вырождающихся и весовых псевдодифференциальных операторов / Воронеж. гос. ун-т. – Воронеж, 1985. – 49 с. – Деп. в ВИНИТИ 4.12.85, №8327 – В.

8. Махортов С.Д. Весовые псевдодифференциальные операторы в пространствах типа Соболева – Слободецкого – Ароншайна / Воронеж. гос. ун-т. – Воронеж, 1986. – 38 с. – Деп. в ВИНИТИ 2.06.86, №3950 – В.